

Thème : Description d'un mouvement.
TP C10 : Mouvement dans un champ de gravitation – Lois de Képler
(version professeur)

Mouvement dans un champ de gravitation.

Mouvement des satellites et des planètes. Orbite. Lois de Kepler. Période de révolution. Satellite géostationnaire.

Capacité numérique : Exploiter, à l'aide d'un langage de programmation, des données astronomiques ou satellitaires pour tester les deuxième et troisième lois de Kepler.

Problématique 1 : La comète de Halley tourne-t-elle autour du Soleil ?

Nous énoncerons les 3 lois de Kepler et les vérifier dans le cas de la comète de Halley, puis nous vérifierons que la comète de Halley appartient au Système Solaire.

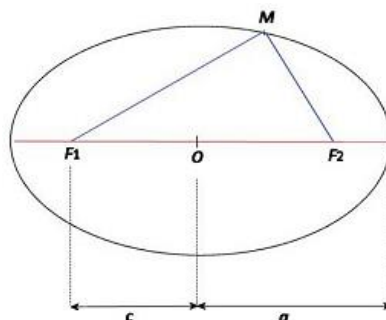
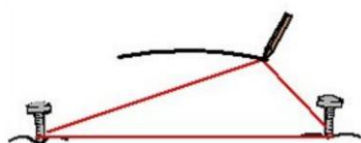
La comète de Halley est passée au plus près du Soleil (périhélie), le 09 février 1986. Sa période de révolution est de 76 ans.

Source : D'après jeanlouisfritsch

1. Première loi de Képler.

Une **ellipse de foyers F_1 et F_2** est l'ensemble des points M d'un plan tels que **$MF_1 + MF_2 = \text{constante} = 2a$** (où a est le demi grand axe de l'ellipse).

Le rapport $\frac{c}{a}$ est appelé **excentricité e**



Activité d'introduction : A l'aide d'un crayon papier et d'un fil, dessiner une ellipse de demi grand axe 8,0 cm et d'excentricité $e = 0,6$. Quelle serait la figure obtenue pour une excentricité égale à 0 ?

Si $e = 0$ alors on obtient un cercle.

La figure est telle que $c = 0,6 \times 8,0 = 4,8$ cm

La longueur du fil est égal à $2a$, soit $2 \times 8,0 = 16$ cm.

- a. Sur la reproduction agrandie de la trajectoire fournie en annexe est déjà placé un foyer, tracer le grand axe et placer le second foyer.

Le second foyer est le symétrique de F_1 par rapport à O .

- b. Une unité astronomique vaut $1,50 \times 10^{11}$ m. Le demi-grand axe de l'orbite de la comète de Halley est égal à 17,9 U.A. Mesurer le demi grand axe a à la règle. Déterminer l'échelle utilisée pour le schéma. (1 cm pour U.A).

On mesure $2a = 28,6$ cm soit $a = 14,3$ cm

Soit une échelle : 1 cm pour $\frac{17,9}{14,3} = 1,25$ U.A.

- c. En choisissant **deux dates différentes**, vérifier que les points correspondant appartiennent à une ellipse dont l'un des foyers est S , centre du Soleil en appliquant la condition **$MF_1 + MF_2 = \text{constante} = 2a$**

- d. Enoncer alors la 1ère loi de Kepler pour la comète de Halley.

Les planètes décrivent des ellipses dont l'un des foyers est le Soleil.

- e. En étudiant les dates sur la reproduction de l'orbite de la comète de Halley, montrer que le mouvement de la comète de Halley n'est pas uniforme ?

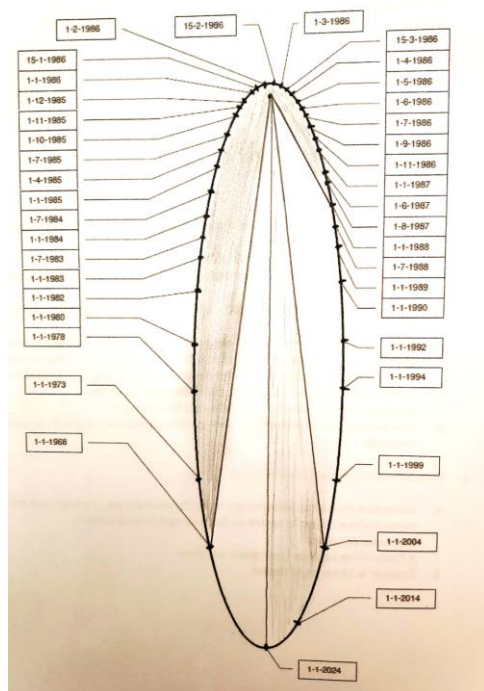
On constate que la comète de Halley met moins d'un an pour faire le tour du Soleil, tandis qu'elle met au moins 50 ans pour faire le tour du second foyer.

Le mouvement de la comète de Halley n'est donc pas uniforme.

2. Deuxième loi de Képler. (Loi des aires).

- a. Construire deux aires balayées qui ne se chevauchent pas, pendant une même durée (**20 ans**) par le rayon vecteur reliant le centre du Soleil au centre de la comète.

Découper ces aires.



A l'aide d'une balance !, comparer ces aires.

On constate que les deux papiers ont la même masse (incertitude < 0,03 g)

- b. Énoncer la 2ème loi de Kepler.

Le rayon Soleil-planète balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux

c.

3. Troisième loi de Képler.

- a. Calculer le rapport $\frac{T^2}{r^3}$ en (année² / U.A.³) pour la Terre et pour la comète de Halley, puis en (s² / m³)

$$\text{Terre : } \frac{T^2}{r^3} = \frac{1^2}{1^3} = 1$$

$$\text{Comète de Halley : } \frac{T^2}{r^3} = \frac{76^2}{17,9^3} = 1,00$$

$$\text{Terre : } \frac{T^2}{r^3} = \frac{(1 \times 365,25 \times 24 \times 3600)^2}{(1 \times 1,50 \times 10^{11})^3} = 1$$

$$\text{Comète de Halley : } \frac{T^2}{r^3} = \frac{(76 \times 365,25 \times 24 \times 3600)^2}{(17,9 \times 1,50 \times 10^{11})^3} = 1,00$$

T étant la période de révolution autour du Soleil et r le rayon moyen de l'orbite du centre de la Terre autour du Soleil.

- b. Énoncer la 3ème loi de Kepler pour un corps céleste ayant une orbite elliptique de demi-grand axe a .

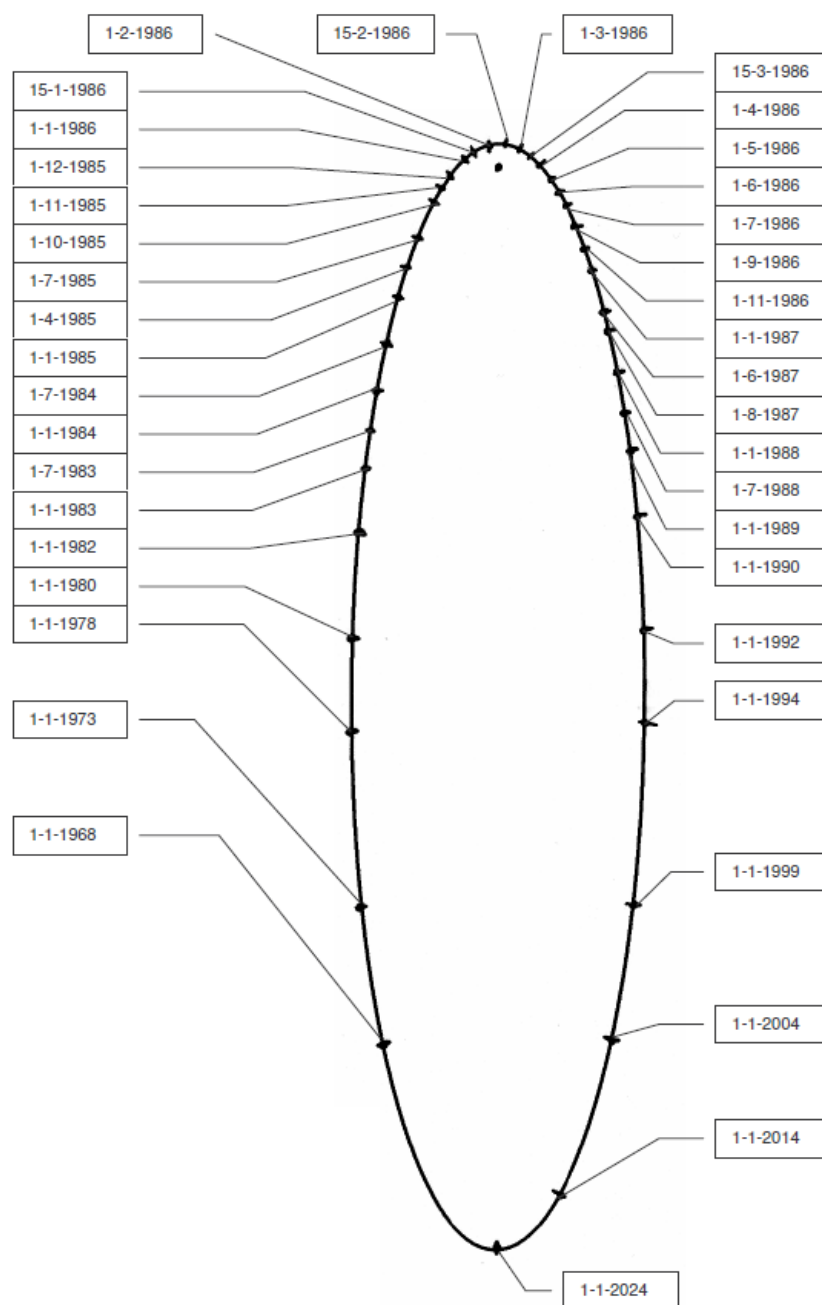
Le carré de la période de révolution est proportionnel au cube du demi grand-axe de l'orbite.

- c. La comète de Halley appartient-elle au système solaire ?

Les rapports $\frac{T^2}{r^3}$ sont égaux pour la Terre et la Comète de Halley, alors la comète de Halley tourne bien autour du Soleil.

- d. En quelle année, la comète de Halley repassera-t-elle au périhélie ?

La comète de Halley repassera au périhélie en $1986 + 76 = 2062$.



Problématique 2 : Montrer à l'aide d'un langage de programmation, que la trajectoire d'une planète est une ellipse.

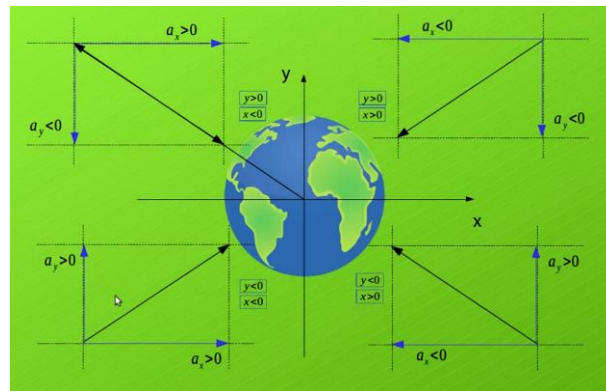
Vidéo à regarder avant le TP : <https://www.youtube.com/watch?v=hAAyAJMIMI> (40 min 35 s)

Ouvrir Spyder et copier le programme donné sur la page suivante.

Exécuter le programme qui permettra de tracer une portion de la trajectoire d'un satellite autour de la Terre.

Questions préalables sur le principe du programme.

Document 1 : Représentation de l'accélération normale.



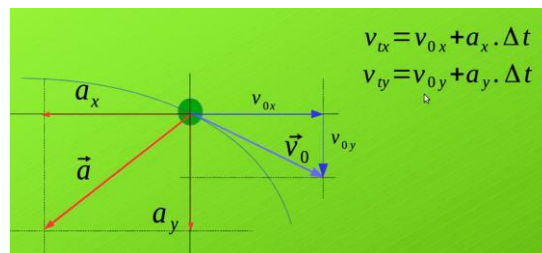
- Justifier les signes des projections sur les axes de l'accélération normale que subit le satellite.

La projection des différents vecteurs est soit dans le sens des axes (signe positif), soit dans le sens opposé (signe négatif)

- Donner l'expression de la norme (valeur, intensité) de l'accélération normale.

$$a_n = \frac{v^2}{R}$$

Document 2 : Représentation du vecteur vitesse.



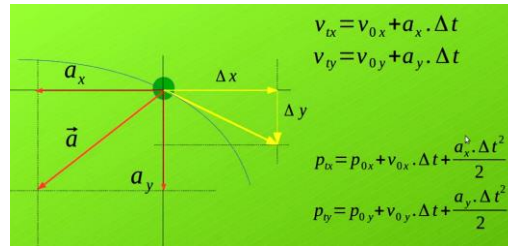
- Justifier les expressions des coordonnées v_{xt} et v_{yt} de la vitesse à une date t .

Par définition $\vec{a}_G = \frac{d\vec{v}_G}{dt}$, on obtient les coordonnées du vecteur vitesse $\vec{v}_G$ en primitivant les coordonnées du vecteur accélération $\vec{a}_G$

En primitivant, on a :

$$\vec{v}_G \begin{pmatrix} v_{Gx}(t) = a_x t + v_{0x} \\ v_{Gy}(t) = a_y t + v_{0y} \end{pmatrix}$$

Document 3 : Expressions des coordonnées de la position du satellite.



4. Justifier les expressions des coordonnées p_{xt} et p_{yt} de la position du satellite à une date t .

Par définition $\overrightarrow{v_G} = \frac{d\overrightarrow{OG}}{dt}$, on obtient les coordonnées du vecteur position $\overrightarrow{OG}$ en primitivant les coordonnées du vecteur accélération $\overrightarrow{v_G}$

En primitivant, on a :

$$\overrightarrow{OG} \begin{pmatrix} x(t) = \frac{1}{2} \cdot a_x \cdot t^2 + v_{0x} \cdot t + x_0 \\ y(t) = \frac{1}{2} \cdot a_y \cdot t^2 + v_{0y} \cdot t + y_0 \end{pmatrix}$$

Programme :

```

from math import sqrt, sin, cos, tan, atan, pi, asin
import matplotlib.pyplot as plt

# les constantes physiques
G = 6.67e-11      # constante de gravitation universelle
MasseTerre = 6e24  # Masse de la Terre

# position initiales x et y
p0x = 3e7
p0y = 2e7
# vitesses initiales x et y
v0x = 100
v0y = 0

x = [p0x]
y = [p0y]

Dt = 0.1

for n in range(0,25000):
    #distance au centre de la Terre // Pythagore
    R = sqrt(p0x**2 + p0y**2)

    #accélération de gravitation (pesanteur)
    a = G * MasseTerre / (R**2)

    # distance au centre de la Terre // Pythagore
    R = sqrt(p0x**2 + p0y**2)

    # accélération de gravitation (pesanteur)
    a = G * MasseTerre / (R**2)

    # cas particuliers
    if (p0x == 0):
        ax = 0
        ay = a
    if (p0y == 0):
        ay = 0
        ax = a

    if (p0x != 0) and (p0y != 0):
        alpha = abs(asin(p0y/R)) # ou alpha = (atan(p0y/p0x))
        ax = a * cos(alpha)
        ay = a * sin(alpha)

    # tenir compte du signe de l'accélération
    if (p0x > 0) and (p0y > 0):
        ax = -ax
        ay = -ay

    if (p0x > 0) and (p0y < 0):
        ax = -ax
        ay = +ay #ne sert à rien

    if (p0x < 0) and (p0y > 0):
        ax = +ax #ne sert à rien

```

$$a_y = -a_y$$

if (p0x < 0) and (p0y < 0):

ax = +ax #ne sert à rien

ay = +ay #ne sert à rien

$$v_{tx} = v_{0x} + a_x \cdot Dt$$

$$v_{ty} = v_{0y} + a_y \cdot Dt$$

$$p_{tx} = p_{0x} + (v_{0x} \cdot Dt) + (a_x \cdot Dt^2) / 2$$

$$p_{ty} = p_{0y} + (v_{0y} \cdot Dt) + (a_y \cdot Dt^2) / 2$$

$$p_{0x} = p_{tx}$$

$$p_{0y} = p_{ty}$$

$$v_{0x} = v_{tx}$$

$$v_{0y} = v_{ty}$$

x.append(ptx)

y.append(pty)

plt.plot(x,y)

plt.show()

Questions sur le programme.

1. Dans les lignes 5 à 20, quelles sont les unités utilisées pour les différentes grandeurs utilisées ?
2. Quelle la norme de la vitesse du satellite en km.h^{-1} .
3. D'après les valeurs utilisées dans les conditions initiales, à quelle distance du centre de la Terre le satellite se situe-t-il à $t = 0$? Sachant que la terre a un rayon moyen $R_T = 6\,380 \text{ km}$, en déduire l'altitude h (km) de ce satellite.
4. A quoi servent les lignes **16 et 17** ? (vidéo 33 min – 34 min).
5. Quel est l'intérêt graphique de réduire la valeur de l'intervalle de temps Dt (**ligne 20**) (vidéo 36 min 38 min) ?
6. Afin d'avoir une portion plus longue de la trajectoire elliptique du satellite, proposer d'autres valeurs de Dt et du nombre de calculs (**ligne 20 et 22**). Afficher la portion de trajectoire correspondante. Faire une capture d'écran. Analyser le résultat obtenu. Conclure.

Réponses :

1. G en $\text{m}^3.\text{kg}^{-1}.\text{s}^{-2}$

$$F = G \cdot \frac{mM}{d^2} \text{ avec } F \text{ en } \text{kg.m.s}^{-2} \text{ car } F = m \cdot a$$

M en kg

p_{0x} et p_{0y} en mètre

v_{0x} et v_{0y} en m.s^{-1}

Dt en seconde

2. $v_0 = \sqrt{v_{0x}^2 + v_{0y}^2} = \sqrt{0^2 + 100^2} = 100 \text{ m.s}^{-1}$ soit $v_0 = 100 \times 3,6 = 360 \text{ km.h}^{-1}$

3. $OG_0 = \sqrt{p_{0x}^2 + p_{0y}^2} = \sqrt{(3,0 \times 10^7)^2 + (2,0 \times 10^7)^2} = 3,6 \times 10^7 \text{ m.}$

L'altitude du satellite est $h = 3,6 \times 10^7 - 6,380 \times 10^6 = 3,0 \times 10^7 \text{ m}$ soit $h = 30\,000 \text{ km.}$

4. Les lignes 16 et 17 servent à créer des tableaux dans lesquels les valeurs des positions en x et y seront rentrées. Par la suite, l'ensemble des positions seront affichées sous la forme d'un graphique.
5. L'intérêt de réduire la valeur de Dt est de faire plus de calculs sur un temps total identique, ainsi la trajectoire devient beaucoup plus lisse.
6. On doit abaisser la valeur de Dt et augmenter le nombre de calculs. Par exemple $Dt = 0.001$ et for n in range(0,1000000)

